



08  
επαναληπτικά  
θέματα

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ  
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

- A. α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 61.  
β. Σχολικό βιβλίο σελίδες 60,61.  
B. α. (Σ), β. (Σ), γ. (Λ), δ. (Σ), ε. (Λ).

ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

- α. i) Έστω ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά. Τότε  $\overline{AB} \parallel \overline{B\Gamma}$ , οπότε  $\det(\overline{AB}, \overline{B\Gamma}) = 0$ .  
Αλλά  $\overline{AB} = (4-2, 5-0) = (2, 5)$  και  $\overline{B\Gamma} = (6-4, \kappa-5) = (2, \kappa-5)$ .  
Άρα  $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & \kappa-5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2(\kappa-5) - 5 \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow 2\kappa - 10 - 10 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 10$ , που είναι άτοπο αφού  $\kappa \neq 10$ . Συνεπώς τα A, B, Γ δεν είναι συνευθειακά.

- ii) Αν M το μέσο της ΑΓ, τότε  $M\left(\frac{2+6}{2}, \frac{0+\kappa}{2}\right) = \left(4, \frac{\kappa}{2}\right)$ . Η ευθεία που διέρχεται από το B(4, 5) και το M  $\left(4, \frac{\kappa}{2}\right)$  είναι προφανώς η (ε) :  $x = 4$ .

- β. Από υπόθεση:  $(AB\Gamma) = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2} |\det(\overline{AB}, \overline{A\Gamma})| = 8$  (1)

Αλλά  $\overline{AB} = (2, 5)$  και  $\overline{A\Gamma} = (6-2, \kappa-0) = (4, \kappa)$ , οπότε η (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & \kappa \end{vmatrix} = 8 \Leftrightarrow |2\kappa - 20| = 16 \Leftrightarrow 2\kappa - 20 = 16 \text{ ή } 2\kappa - 20 = -16 \Leftrightarrow \kappa = 18 \text{ ή } \kappa = 2,$$

άρα Γ(6, 18) ή Γ(6, 2).

γ. Για  $\kappa = 2$  είναι  $\Gamma(6,2)$

Εύρεση της εξίσωσης της ευθείας ( $\eta$ ) (εξίσωση ύψους):

$$\lambda_{\text{BG}} = \frac{2-5}{6-4} = -\frac{3}{2} \text{ άρα } \lambda_{(\eta)} = \frac{2}{3} \text{ (αφού } \lambda_{(\eta)} \lambda_{\text{BG}} = -1)$$

και επειδή  $\eta$  ( $\eta$ ) διέρχεται από το  $A(2, 0)$  έχουμε:

$$\psi - 0 = \frac{2}{3}(x - 2) \Leftrightarrow \psi = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \text{ που είναι η εξίσωση της } (\eta).$$

Για την εύρεση του σημείου  $\Delta$ : λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων ( $\epsilon$ ), ( $\eta$ ).  
Έτσι:

$$\begin{cases} x = 4 \\ \psi = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ \psi = \frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ \psi = \frac{4}{3} \end{cases}, \text{ άρα } \Delta \left( 4, \frac{4}{3} \right).$$

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

α. Η εξίσωση (1) ισοδύναμα γράφεται:  $(3-\mu)x^2 + (\mu+2)\psi^2 = (\mu+2)(3-\mu)$  και για να παριστάνει κύκλο, πρέπει (αρχικά) να ισχύει:  $3-\mu = \mu+2$  δηλ.  $\mu = \frac{1}{2}$ . Η

προηγούμενη εξίσωση για  $\mu = \frac{1}{2}$ , γίνεται:

$$\frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}\psi^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow x^2 + \psi^2 = \frac{5}{2},$$

που είναι εξίσωση κύκλου κέντρου  $O(0,0)$  και ακτίνας  $\rho = \sqrt{\frac{5}{2}}$ .

Επομένως  $\mu = \frac{1}{2}$ .

β. Για να παριστάνει έλλειψη η εξίσωση (1), θα πρέπει να ισχύουν:

$$\begin{cases} \mu+2 > 0 \\ 3-\mu > 0 \\ \mu+2 \neq 3-\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu > -2 \\ \mu < 3 \\ \mu \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -2 < \mu < 3 \text{ και } \mu \neq \frac{1}{2}, \text{ άρα } \mu \in \left(-2, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 3\right).$$

γ. Για  $\mu \in \left(-2, \frac{1}{2}\right)$

i) Είναι:  $-2 < \mu < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < \mu + 2 < 2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < \mu + 2 < \frac{5}{2}$  (2)

και  $-2 < \mu < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 > -\mu > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < -\mu < 2 \Leftrightarrow 3 - \frac{1}{2} < 3 - \mu < 5$

$\Leftrightarrow \frac{5}{2} < 3 - \mu < 5$  (3).

Από (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι  $3 - \mu > \mu + 2$ , οπότε  $\alpha^2 = 3 - \mu$  και  $\beta^2 = \mu + 2$ , δηλαδή η έλλειψη έχει τη μορφή  $\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{\psi^2}{\alpha^2} = 1$ , επομένως οι εστίες της βρίσκονται πάνω στον άξονα  $\psi'\psi$ .

ii) Έχουμε  $\alpha^2 = 3 - \mu$ ,  $\beta^2 = \mu + 2$  άρα  $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = (3 - \mu) - (\mu + 2) = 1 - 2\mu$ .

Για την εκκεντρότητα  $\varepsilon$  της έλλειψης ισχύει:

$\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$ , οπότε  $\frac{\gamma^2}{\alpha^2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{3 - 1 - 2\mu}{4 - 3 - \mu} \Leftrightarrow 4 - 8\mu = 9 - 3\mu \Leftrightarrow \mu = -1$ .

#### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Για  $A(-1, \psi)$  και  $B(2x, \psi)$  με  $O(0,0)$  έχουμε  $\overline{OA} = (-1, \psi)$  και  $\overline{OB} = (2x, \psi)$  οπότε:

A. Αφού  $\overline{OA} \perp \overline{OB}$ , τότε  $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0 \Leftrightarrow -1 \cdot 2x + \psi \cdot \psi = 0 \Leftrightarrow \psi^2 = 2x$  που είναι εξίσωση παραβολής  $C_1$  με  $2\rho = 2 \Leftrightarrow \rho = 1$ , συνεπώς η εστία είναι το σημείο  $E\left(\frac{\rho}{2}, 0\right)$  ή  $E\left(\frac{1}{2}, 0\right)$  και διευθετούσα  $\delta$  είναι η ευθεία με εξίσωση

$x = -\frac{\rho}{2}$  ή  $x = -\frac{1}{2}$ .

B. Έχουμε  $\overline{OB}^2 + 3\overline{OA}^2 = 15 \Leftrightarrow |\overline{OB}|^2 + 3|\overline{OA}|^2 = 15 \Leftrightarrow$

$\sqrt{(2x)^2 + \psi^2}^2 + 3\sqrt{(-1)^2 + \psi^2}^2 = 15 \Leftrightarrow 4x^2 + \psi^2 + 3(1 + \psi^2) = 15$ , άρα

$4x^2 + \psi^2 + 3 + 3\psi^2 = 15 \Leftrightarrow 4x^2 + 4\psi^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 + \psi^2 = 3$  που είναι εξίσωση κύκλου  $C_2$  με κέντρο  $O(0, 0)$  και ακτίνα  $R = \sqrt{3}$ .

Γ. α) Για τα κοινά σημεία των  $C_1, C_2$  λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} \psi^2 = 2x \\ x^2 + \psi^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi^2 = 2x \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \psi^2 = 2 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x = -3 \\ \psi^2 = -6 \end{cases}$$

που είναι αδύνατο, επομένως έχουμε:  $\begin{cases} x = 1 \\ \psi = \sqrt{2} \quad \text{ή} \quad \psi = -\sqrt{2} \end{cases}$ . Άρα τα

κοινά σημεία των  $C_1, C_2$  είναι το  $K(1, \sqrt{2})$  και το  $\Lambda(1, -\sqrt{2})$ .

β) Η εφαπτομένη της  $C_1$  στο  $K(1, \sqrt{2})$  έχει εξίσωση:

$$\psi\psi_1 = \rho(x+x_1) \text{ ή } \psi\sqrt{2} = 1(x+1) \Leftrightarrow \sqrt{2}\psi = x+1 \Leftrightarrow \psi = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1).$$

Η εφαπτομένη του  $C_2$  στο  $\Lambda(1, -\sqrt{2})$  έχει εξίσωση:

$$xx_2 + \psi\psi_2 = 3 \text{ ή } x + \psi(-\sqrt{2}) = 3 \Leftrightarrow \sqrt{2}\psi = x-3 \Leftrightarrow \psi = \frac{\sqrt{2}}{2}x - 3\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2).$$

Οι ευθείες που παριστάνουν οι (1), (2) έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης ( $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ), άρα οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες.