ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 24 ΜΑΪΟΥ 2008
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Θέμα 1ο

Α.1 Θεωρία

Α.2 Θεωρία

Β. **α. Σωστό**
β. Σωστό
γ. Λάθος
δ. Λάθος
ε. Σωστό

Θέμα 2ο

α. Αφο $\left|\left(i+2\sqrt{2}\right)z\right|=6 \Leftrightarrow \left|2\sqrt{2}+i\right|\left|z\right|=6 \Leftrightarrow 3\left|z\right|=6 \Leftrightarrow \left|z\right|=2$, άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας $\rho=2$.

β. Έστω $M(x,y)$ η εικόνα του w τότε: $\left|w-(1-i)\right|=\left|w-(3-3i)\right| \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left|x+yi-1+i\right|=\left|x+yi-3+3i\right| \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y+3)^2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $x-y-4=0$, δηλαδή ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w είναι η ευθεία με εξίσωση $x-y-4=0$.

γ. $$\left|w\right|_{min}=d(O,\varepsilon)=\frac{\left|1\cdot 0-1\cdot 0-4\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}.$$

δ. $\left|z-w\right|_{min}=\left|d(O,\varepsilon)-\rho\right|=2\sqrt{2}-2$.

Θέμα 3ο

α. $$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

και $f(0)=0$ επομένως η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

β. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\ln x+1$

	0		e^{-1}		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

Η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{1}{e}\right]$ επομένως $f\left(\left[0,\frac{1}{e}\right]\right)=\left[f\left(\frac{1}{e}\right),f(0)\right]=\left[-\frac{1}{e},0\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$ επομένως $f\left(\left[\frac{1}{e},+\infty\right)\right)=\left[f\left(\frac{1}{e}\right),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$

Δηλαδή $f\left(\left[\frac{1}{e},+\infty\right)\right)=\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$,

οπότε $f([0,+\infty))=\left[-\frac{1}{e},0\right]\cup\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)=\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$.

γ. $x=e^{\frac{\alpha}{x}}\Leftrightarrow \ln x=\frac{\alpha}{x}\Leftrightarrow x\ln x=\alpha\Leftrightarrow f(x)=\alpha$, $x>0$.

- Αν $-\frac{1}{e}<\alpha<0$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα στο $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ και μοναδική ρίζα στο $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$.
- Αν $\alpha>0$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα στο $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$.
- Αν $\alpha=0$, τότε $f(x)=0\Leftrightarrow x\ln x=0\Leftrightarrow x=1$.
- Αν $\alpha<-\frac{1}{e}$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

δ. Για κάθε $x>0$ αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[x,x+1]$, επομένως υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$, ώστε $f'(\xi)=f(x+1)-f(x)$

αλλά $f''(x)=\frac{1}{x}>0$, επομένως f' γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ οπότε:

$\xi<x+1\Rightarrow f'(\xi)<f'(x+1)\Rightarrow f(x+1)-f(x)<f'(x+1)$.

<u>Θέμα 4ο</u>

α. Έστω $k=\int_0^2 f(t)dt$, τότε $f(x)=(10x^3+3x)k-45$

Άρα $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2[(10x^3+3x)k-45]dx\Leftrightarrow k=k\left[\frac{5}{2}x^4+\frac{3}{2}x^2\right]_0^2-45[x]_0^2=k\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 46k-90=k\Leftrightarrow k=2$.

Άρα $f(x)=20x^3+6x-45$.

β. Για το $\lim\limits_{h\to0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}$ θέτω $-h=u$, τότε

$$\lim_{h\to0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}=\lim_{u\to0}\frac{g'(x)-g'(x+u)}{-u}=\lim_{u\to0}\frac{g'(x+u)-g'(x)}{u}=g''(x)$$

γ. i.

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x-h)}{2h}=g''(x).$$

Άρα $g''(x)=f(x)+45 \Leftrightarrow (g'(x))'=(5x^4+3x^2)'$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ επομένως υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$ ώστε $g'(x)=5x^4+3x^2+c$ και επειδή $g'(0)=1$, τότε $c=1$, δηλαδή $g'(x)=5x^4+3x^2+1$ οπότε $g'(x)=(x^5+x^3+x)'$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ επομένως υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$ ώστε $g(x)=x^5+x^3+x+c$ και επειδή $g(0)=1$, τότε $c=1$, δηλαδή $g(x)=x^5+x^3+x+1$.

ii. $g'(x)=5x^4+3x^2+1>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ επομένως και 1 – 1._