ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1^{O}

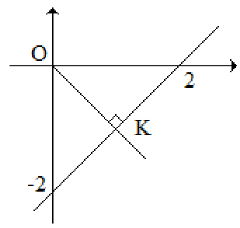
Α. Θεωρία σχολικό σελ 251
Β. Θεωρία σχολικό σελ 213
Γ. **α$\to$Σ β$\to$Σ γ$\to$Λ δ$\to$Λ ε$\to$Λ**

ΘΕΜΑ 2^{O}

Α. α. Έστω $z = x + yi$, τότε: $\left.\begin{array}{l} 2\lambda + 1 = x \\ 2\lambda - 1 = y \end{array}\right\} \Rightarrow x - y = 2$ δηλαδή οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z βρίσκονται στην ευθεία $\varepsilon : y = x - 2$.

β. Ο ζητούμενος μιγαδικός z έχει εικόνα το σημείο Κ της (ε) ώστε $OK \perp \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{OK}\lambda_{\varepsilon} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{OK} = -1$ επομένως $OK : y = -x$

$\left.\begin{array}{r} y = -x \\ y = x - 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \end{array}\right.$ επομένως $K(1,-1)$ δηλαδή ελάχιστο μέτρο έχει ο μιγαδικός $z_0 = 1 - i$.



Β. Έστω $w = x + yi$, τότε: $|w|^2 + \overline{w} - 12 = z_0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - yi - 12 = 1 - i \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x^2 + y^2 + x - 12 = 1 \\ -y = -1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x^2 + 1 + x = 13 \\ y = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x^2 + x - 12 = 0 \\ y = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -4,\ y = 1 \\ x = 3,\ y = 1 \end{array}\right.$$ 'αρα $w = -4 + i$ ή $w = 3 + i$.

ΘΕΜΑ 3^{O}

Α. $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0)$, για κάθε $x > -1$, επομένως η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$ και επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ με $f'(x) = \alpha^x \ln\alpha - \frac{1}{x+1}$ από το θεώρημα Fermat: $f'(0) = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = e$.

Β. Για $\alpha = e$ τότε $f(x) = e^x - \ln(x+1)$.

α. f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ με $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$,

$f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2} > 0$ για κάθε $x > -1$ άρα η f είναι κυρτή.

β. $f'(x) = \frac{e^x(x+1) - 1}{x+1}$, έστω $g(x) = e^x(x+1) - 1$, g παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$
$g'(x) = e^x(x+2) > 0$, επομένως g γνησίως αύξουσα στο $(-1,+\infty)$ και $g(0) = 0$
για κάθε $x < 0 \Rightarrow g(x) < g(0) \Rightarrow f'(x) < 0$ δηλαδή f γν. φθίνουσα στο $(-1,0]$
για κάθε $x > 0 \Rightarrow g(x) > g(0) \Rightarrow f'(x) > 0$ δηλαδή f γν. αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

γ. Από Ββ προκύπτει ότι η f έχει ελάχιστο στο $x_0 = 0$ το $f(0) = 1$ και επειδή $\beta, \gamma \neq 0$, τότε $f(\beta), f(\gamma) > 1$. Έστω $h(x) = (f(\beta) - 1)(x - 2) + (f(\gamma) - 1)(x - 1)$, που είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πολυωνυμική και $h(1) = -(f(\beta) - 1) < 0$, $h(2) = f(\gamma) - 1 > 0$ από το θεώρημα του Bolzano εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \dfrac{f(\beta) - 1}{x - 1} + \dfrac{f(\gamma) - 1}{x - 2} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$.

ΘΕΜΑ 4$^{\text{O}}$

α. Επειδή f συνεχής στο $[0,2]$, τότε $\int_0^x f(t)dt$ παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ άρα και στο $(0,2]$, ομοίως H συνεχής στο $(0,2]$ και $\dfrac{H(x)}{x}$ συνεχής ως πηλίκο συνεχών άρα G συνεχής στο $(0,2]$ ως αλγεβρικό άθροισμα συνεχών.

$$G(0) = 6\lim_{t\to 0}\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2} = 6\lim_{t\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}} = 3$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{H(x)}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{d'H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{H'(x)}{x'} = \lim_{x\to 0^+}(xf(x)) = 0f(0) = 0$$

Άρα $\lim_{x\to 0^+} G(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\dfrac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3\right) = 0 - 0 + 3 = 3 = G(0)$

($\lim_{x\to 0^+}\int_0^x f(t)dt = 0$ αφού η συνάρτηση $\int_0^x f(t)dt$ είναι συνεχής ως παρ/μη)

Επομένως η G είναι συνεχής στο $[0,2]$.

β. Η G είναι παρ/μη στο $(0,2)$ ως αλγεβρικό άθροισμα παρ/μων με

$$G'(x) = \left(\frac{H(x)}{x}\right)' - f(x) = \frac{H'(x)x - H(x)}{x^2} - f(x) = \frac{x^2 f(x) - H(x)}{x^2} - f(x) = -\frac{H(x)}{x^2}$$

γ. G συνεχής στο $[0,2]$, παρ/μη στο $(0,2)$ και $G(0) = 3$, $G(2) = \dfrac{H(2)}{2} - \int_0^2 f(t)dt + 3 =$

$= \dfrac{H(2) - 2\int_0^2 f(t)dt}{2} + 3 = \dfrac{\int_0^2 tf(t)dt - 2\int_0^2 f(t)dt}{2} + 3 = \dfrac{\int_0^2 (t-2)f(t)dt}{2} + 3 = 3$, επομένως

από θεώρημα Rolle υπάρχει $\alpha \in (0,2)$ ώστε $H'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{H(\alpha)}{\alpha^2} = 0 \Leftrightarrow H(\alpha) = 0$.

δ. Η G είναι συνεχής στο $[0,\alpha]$ παραγωγίσιμη στο $(0,\alpha)$ επομένως από το Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi \in (0,\alpha)$ ώστε:

$$G'(\xi) = \frac{G(\alpha) - G(0)}{\alpha - 0} \Leftrightarrow -\frac{H(\xi)}{\xi^2} = \frac{-\int_0^\alpha f(t)dt + 3 - 3}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha\int_0^\xi tf(t)dt = \xi^2\int_0^\alpha f(t)dt\,.$$