ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΕΝΙΚΗΣ 2013

ΘΕΜΑ Α.

Α1. Σελ. 28 σχολικό

Α2. Σελ. 14 σχολικό

Α3. Σελ. 87 σχολικό

Α4.

α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Λάθος

ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β.

Β1.

$$P(\omega_1) = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}{\left(x^3+x^2\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2-1}{\left(x^3+x^2\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x+1-1}{\left(x^3+x^2\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x}{x\cdot\left(x^2+x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{1}{x\cdot\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-1\left(\sqrt{1-1+1}+1\right)} =$$

$$= \frac{1}{4}$$

Άρα $\boxed{P(\omega_1) = \frac{1}{4}}$.

Επιπλέον $f_{(x)} = \frac{x}{3}\ln x$ άρα $f'_{(x)} = \left(\frac{x}{3}\right)'\ln x + \frac{x}{3}\left(\ln x\right)' = \frac{1}{3}\ln x + \frac{x}{3}\cdot x = \frac{1}{3}\cdot\left(\ln x + 1\right)$

οπότε $f'_{(1)}=\frac{1}{3}\cdot(\ln 1+1)=\frac{1}{3}$. Άρα $\boxed{P(\omega_3)=\frac{1}{3}}$.

Β2. Το $A'=\{\omega_2,\omega_3\}$ οπότε $\{\omega_3\}\subseteq \mathrm{A}'$ άρα $P(\omega_3)\le P(\mathrm{A}')\Leftrightarrow \frac{1}{3}\le P(\mathrm{A}')$

Ακόμα $P(\mathrm{A}')\le\frac{3}{4}\Leftrightarrow 1-P(\mathrm{A})\le\frac{3}{4}\Leftrightarrow P(\mathrm{A})\ge 1-\frac{3}{4}\Leftrightarrow P(\mathrm{A})\ge\frac{1}{4}$ το οποίο αληθεύει,

αφού $\{\omega_1\}\subseteq \mathrm{A}$ άρα $P(\omega_1)\le P(\mathrm{A})\Leftrightarrow\frac{1}{4}\le P(\mathrm{A})$

Β3. $P(\mathrm{A}')=\frac{3}{4}\Leftrightarrow P(\omega_2)+P(\omega_3)=\frac{3}{4}\Leftrightarrow P(\omega_2)+\frac{1}{3}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow P(\omega_2)=\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\Leftrightarrow P(\omega_2)=\frac{5}{12}$

Τότε :

$$P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)+P(\omega_4)=1\Leftrightarrow P(\omega_4)=1-\left(P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P(\omega_4)=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{12}+\frac{1}{3}\right)\Leftrightarrow P(\omega_4)=1-1\Leftrightarrow P(\omega_4)=0$$

Αλλά $(\mathrm{A}-\mathrm{B})\cup(\mathrm{B}-\mathrm{A})=\{\omega_3,\omega_4\}$ οπότε

$$P\left((\mathrm{A}-\mathrm{B})\cup(\mathrm{B}-\mathrm{A})\right)=P(\omega_3)+P(\omega_4)=\frac{1}{3}+0=\frac{1}{3}$$

και $A'=\{\omega_2,\omega_3\}$, $\mathrm{B}'=\{\omega_2,\omega_4\}$ άρα $A'-\mathrm{B}'=\{\omega_3\}$ με $P(A'-\mathrm{B}')=P(\omega_3)=\frac{1}{3}$.

ΘΕΜΑ Γ.

Γ1. Αν το κάτω άκρο της πρώτης κλάσης είναι το **α=50** τότε η τέταρτη κλάση είναι η $\boxed{[a+3c,a+4c)}$ όπου c το πλάτος των κλάσεων, με κέντρο κλάσης $\boxed{x_4=85}$ οπότε :

$$x_4=\frac{a+3c+a+4c}{2}\Leftrightarrow 85=\frac{50+3c+50+4c}{2}\Leftrightarrow 170=100+7c\Leftrightarrow c=10$$

Γ2. Αφού η διάμεσος είναι δ=75 άρα το 50% των παρατηρήσεων έχει τιμή το πολύ 75 και το υπόλοιπο 50% τουλάχιστον 75, οπότε :

$$f_1\%+f_2\%+\frac{f_3\%}{2}=50\ (1)$$

$$\frac{f_3\%}{2}+f_4\%=50\ (2)$$

Αλλά $f_4=2f_3$

άρα (2)→ $\frac{f_3\%}{2}+2f_3\%=50 \Leftrightarrow f_3\%+4f_3\%=100 \Leftrightarrow 5f_3\%=100 \Leftrightarrow f_3\%=20$

οπότε $\boxed{f_3=0,2}$ και $\boxed{f_4=0,4}$.

(1)→ $f_1\%+f_2\%+10=50 \Leftrightarrow f_1\%+f_2\%=40 \Leftrightarrow f_1\%=40-f_2\% \Leftrightarrow f_1=0,40-f_2$

Τέλος ισχύει :

$$\bar{x}=\sum_{i=1}^{4}x_i f_i \Leftrightarrow 74=55\cdot f_1+65\cdot f_2+75\cdot f_3+85\cdot f_4 \Leftrightarrow 55\cdot f_1+65\cdot f_2=74-(75\cdot 0,2+85\cdot 0,4)$$

$$\Leftrightarrow 55\cdot f_1+65\cdot f_2=25 \overset{f_1=0,40-f_2}{\Leftrightarrow} 55\cdot(0,40-f_2)+65\cdot f_2=25 \Leftrightarrow 65\cdot f_2-55\cdot f_2=25-22 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10f_2=3 \Leftrightarrow f_2=0,3$$

Επομένως $\boxed{f_1=0,10}$ και ο πίνακας κατανομής είναι ο :

[α,β)	x_i	f_i	$x_i\cdot f_i$
[50,60)	55	0,10	5,5
[60,70)	65	0,30	19,5
[70,80)	75	0,20	15,0
[80,90)	85	0,40	34,0
Σύνολο		1,00	

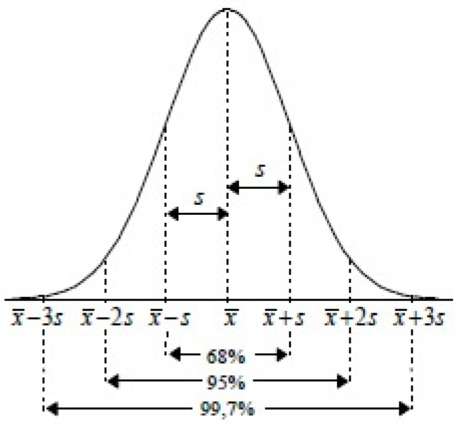
Γ3. Για την μέση τιμή των παρατηρήσεων που έχουν τιμή μικρότερη του 80 ισχύει:

$$\bar{x}=\frac{x_1\nu_1+x_2\nu_2+x_3\nu_3}{\nu_1+\nu_2+\nu_3}=\frac{\frac{x_1\nu_1+x_2\nu_2+x_3\nu_3}{\nu}}{\frac{\nu_1+\nu_2+\nu_3}{\nu}}=\frac{x_1\frac{\nu_1}{\nu}+x_2\frac{\nu_2}{\nu}+x_3\frac{\nu_3}{\nu}}{\frac{\nu_1}{\nu}+\frac{\nu_2}{\nu}+\frac{\nu_3}{\nu}}=\frac{x_1f_1+x_2f_2+x_3f_3}{f_1+f_2+f_3}=$$

$$=\frac{40}{0,1+0,3+0,2}=\frac{40}{0,6}=\frac{200}{3}$$

Γ4. Στην κανονική κατανομή το 2,5% των παρατηρήσεων έχει τιμή τουλάχιστον $\bar{x}+2s$, άρα $\boxed{\bar{x}+2s=74}$

και το 16% έχει τιμή το πολύ $\bar{x}-s$, άρα $\boxed{\bar{x}-s=68}$
οπότε :

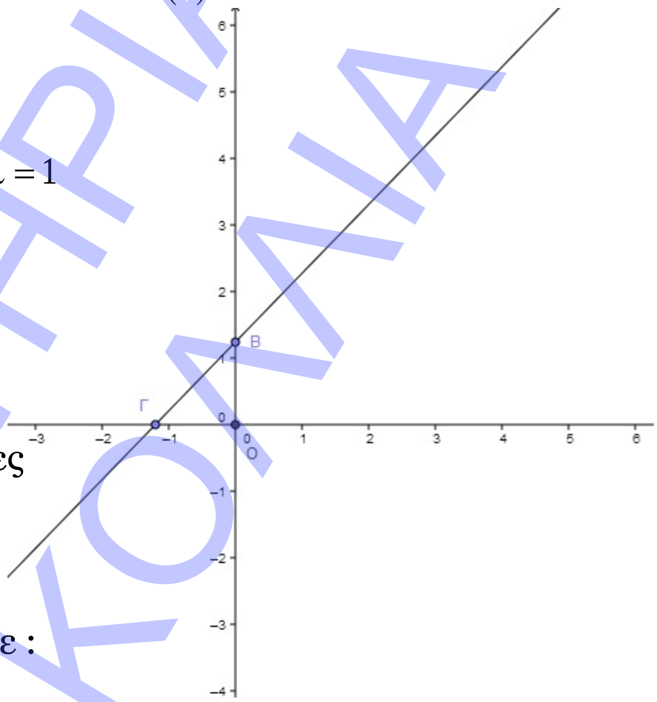


$$\begin{cases}\bar{x}+2s=74\\ \bar{x}-s=68\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\bar{x}+2s=74\\ \bar{x}=68+s\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}68+s+2s=74\\ \bar{x}=68+s\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3s=74-68\\ \bar{x}=68+s\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3s=6\\ \bar{x}=68+s\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}s=2\\ \bar{x}=70\end{cases}$$

ΘΕΜΑ Δ.

Δ1. $f(x)=x\ln x+\kappa \Rightarrow f'(x)=\ln x+1$ τότε $f(1)=\kappa$ και $f'(1)=1$.



Αν $(\varepsilon): y=\lambda x+\beta$ η εξίσωση της εφαπτόμενης

ευθείας στο σημείο $(1, f(1))$ τότε $\lambda = f'(1) \Leftrightarrow \lambda=1$

και το σημείο $(1, f(1))$ την επαληθεύει οπότε :

$f(1)=\lambda\cdot 1+\beta \Leftrightarrow \kappa=1+\beta \Leftrightarrow \beta=\kappa-1$.

Άρα $(\varepsilon): y=x+\kappa-1$ η οποία τέμνει τους άξονες

στα σημεία $\mathrm{B}(0,\kappa-1)$ και $\Gamma(1-\kappa,0)$

Τότε το εμβαδόν του ΟΒΓ τριγώνου είναι ίσο με :

$(\mathrm{OB\Gamma})=\frac{1}{2}(\mathrm{OB})\cdot(\mathrm{O\Gamma})=\frac{1}{2}(\kappa-1)\cdot(\kappa-1)=\frac{1}{2}(\kappa-1)^2$. Αλλά .

$(\mathrm{OB\Gamma})<2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\kappa-1)^2<2 \Leftrightarrow (\kappa-1)^2<4 \Leftrightarrow \kappa^2-2\kappa+1<4 \Leftrightarrow \kappa^2-2\kappa-3<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\kappa+1)(\kappa-3)<0$

κ	1		3	
$(\kappa+1)(\kappa-3)$		-	o	+

Άρα $\kappa \in (1,3)$ και ο μοναδικός ακέραιος σ' αυτό το διάστημα είναι το κ=2.

Δ2. α) Αφού $(\varepsilon): y=x+1$ τότε οι τεταγμένες θα είναι της μορφής $y_i=x_i+1$ με $i=1,2,...,50$. Επομένως $\bar{y}=\bar{x}+1 \Leftrightarrow 31=\bar{x}+1 \Leftrightarrow \bar{x}=30$.

β) Αν $\bar{x}'=31$ η νέα μέση τιμή τότε :

$$\overline{x}' = \frac{x_1+3+x_2+3+\dots+x_{20}+3+x_{21}+x_{22}+\dots+x_{35}+x_{36}-\lambda+x_{37}-\lambda+\dots+x_{50}-\lambda}{50} \Leftrightarrow$$

$$31 = \frac{x_1+x_2\dots+x_{50}}{50}+\frac{3\cdot 20-15\cdot\lambda}{50} \Leftrightarrow 31=30+\frac{60-15\cdot\lambda}{50}\Leftrightarrow 31=30+\frac{60-15\cdot\lambda}{50}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 60-15\cdot\lambda=50\Leftrightarrow\lambda=\frac{2}{3}$$

Δ3. $f(x)=x\ln x+2 \Rightarrow f'(x)=\ln x+1$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x+1=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=e^{-1}$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow \ln x+1>0 \Leftrightarrow \ln x>-1 \Leftrightarrow x>e^{-1}$

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Άρα $\frac{1}{e}<a<\beta<\gamma<e \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{1}{e}\right)<f(a)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)$

αλλά $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}+2=-\frac{1}{e}+2$, $f(e)=e\ln e+2=e+2$ και $f'\left(\frac{1}{e}\right)=0$ επομένως

$f'\left(\frac{1}{e}\right)<f\left(\frac{1}{e}\right)<f(a)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)$ άρα $R=f(e)-f'\left(e^{-1}\right)=e+2$.

και η μέση τιμή τους είναι :

$$\overline{y}=\frac{f'\left(\frac{1}{e}\right)+f(a)+f(\beta)+f(\gamma)+f(e)}{5}=\frac{0+a\ln a+2+\beta\ln\beta+2+\gamma\ln\gamma+2+e+2}{5}=$$

$$=\frac{\ln a^{a}+\ln\beta^{\beta}+\ln\gamma^{\gamma}+8+e}{5}=\frac{\ln\left(a^{a}\cdot\beta^{\beta}\cdot\gamma^{\gamma}\right)+8+e}{5}=\frac{\ln\left(e^{7}\right)+8+e}{5}=\frac{7+8+e}{5}=\frac{15+e}{5}$$

Δ4. α) Για να σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f οξεία γωνία με τον $x'x$ θα πρέπει η κλίση της να είναι θετικός αριθμός, δηλαδή πρέπει $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow$

$l\,n\,x > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1} \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$ άρα $\boxed{A = \{t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{30} = 1\}}$.

Για το Β ισχύει :

$f(t) > f'(t) + 1 \Leftrightarrow t \ln t + 2 > \ln t + 2 \Leftrightarrow t \ln t - \ln t > 0 \Leftrightarrow \ln t(t-1) > 0$

t	0		1	
lnt		-		
t-1		-		
lnt(t-1)		+		

άρα $\boxed{B = \{t_2, t_3, \ldots, t_{29}\}}$

και οι αντίστοιχες πιθανότητες είναι $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ και $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{29}{30}$

β) Το ενδεχόμενο $A \cap B = \{t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{29}\}$ με συχνότητα $P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{19}{30}$.

Επιμέλεια απαντήσεων

Παναγιώτης Κ. Μάρκος

Μαθηματικός