ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2014

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

30-05-14

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α.

Α1. Σελ. 30 σχολικό

Α2. Σελ. 13 σχολικό

Α3. Σελ. 59 σχολικό

Α4.

α) Σωστό

β) Λάθος

γ) Λάθος

δ) Λάθος

ε) Σωστό

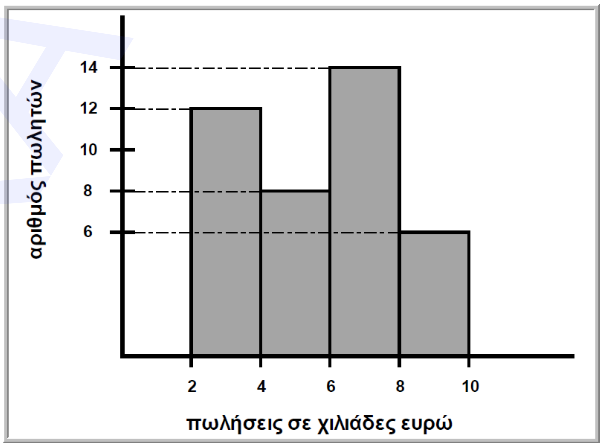
ΘΕΜΑ Β.

Β1. Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων κάθε ορθογώνιο έχει ύψος όσο η αντίστοιχη συχνότητα. Άρα

$\nu_1 = 12$, $\nu_2 = 8$, $\nu_3 = 14$ και $\nu_4 = 6$

Τότε το μέγεθος ν του δείγματος είναι

$$\nu = \sum_{i=1}^{4} \nu_i = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = 40 .$$



B2. Ο τύπος που δίνει τη σχετική συχνότητα είναι

$$f_i = \frac{v_i}{v}$$

Οπότε

$$f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{12}{40} = 0,30$$

$$f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{8}{40} = 0,20$$

i	Κλάσεις	κεντρικές τιμές xi	Συχνότητα vi	Σχετική Συχνότητα fi	xi*vi
1	[2,4)	3	12	0,30	36
2	[4,6)	5	8	0,20	40
3	[6,8)	7	14	0,35	98
4	[8,10)	9	6	0,15	54
	Σύνολο		40	1,00	228

$f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{14}{40} = 0,35$ και $f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{6}{40} = 0,15$.

B3. Η μέση τιμή των ομαδοποιημένων παρατηρήσεων είναι :

$$\bar{x} = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{4} x_i v_i = \frac{228}{40} = 5,7 \text{ χιλιάδες €}$$

B4. Το πλήθος των παρατηρήσεων που έχουν τιμή από 4,5 εώς 6 χιλιάδες € αποτελεί τα $3/4$ των παρατηρήσεων που ανήκουν στο διάστημα [4,6) δηλαδή:

$$3/4 \cdot v_2 = \frac{3}{4} \cdot 8 = 6$$

Οπότε τουλάχιστον 4,5 χιλιάδες € έκαναν $3/4 \cdot v_2 + v_3 + v_4 = 6 + 14 + 6 = 26$ πωλητές.

ΘΕΜΑ Γ.

Γ1. Αφού $f_{(x)} = 4x^3 - \frac{7}{2}x^2 + x - 1$ τότε $f'_{(x)} = 12x^2 - 7x + 1$

$f'_{(x)} = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 7x + 1 = 0$, $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 49 - 48 = 1 > 0$ άρα

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 12} = \frac{7 \pm 1}{24} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{array} \right.$$

x	$-\infty$		$1/4$		$1/3$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

Η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο στο $x_1 = \frac{1}{4}$ και $x_2 = \frac{1}{3}$. Άρα $P(\mathrm{K}) = \frac{1}{4}$ και

$P(\mathrm{A}) = \frac{1}{3}$. Αλλά $P(K) + P(A) + P(\Pi) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + P(\Pi) = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P(\Pi) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(\Pi) = \frac{5}{12}$$

Γ2.

$P(\Gamma) = P(\mathrm{K} \cup \mathrm{A}) = P(\mathrm{K}) + P(\mathrm{A}) - P(\mathrm{K} \cap \mathrm{A}) \overset{\mathrm{K}\cap\mathrm{A}=\varnothing}{=} P(\mathrm{K}) + P(\mathrm{A}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$

$P(\Delta) = P\left((\mathrm{K} \cup \mathrm{A})'\right) = 1 - P(\mathrm{K} \cup \mathrm{A}) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$

$P(\mathrm{E}) = P(\mathrm{A} \cup \Pi') = P(\mathrm{A}) + P(\Pi') - P(\mathrm{A} \cap \Pi') \overset{\mathrm{A}\cap\Pi'=\mathrm{A}-\Pi}{=} P(\mathrm{A}) + 1 - P(\Pi) - P(\mathrm{A} - \Pi) =$

$= \frac{1}{3} + 1 - \frac{5}{12} - \left(P(\mathrm{A}) - P(\mathrm{A} \cap \Pi)\right) \overset{\mathrm{A}\cap\Pi=\varnothing}{=} \frac{1}{3} + 1 - \frac{5}{12} - \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$

Γ3. Αν οι πράσινες μπάλες είναι x τότε οι άσπρες είναι x-4 οπότε τότε θα ισχύει :

$P(\Pi) = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{x}{N(\Omega)} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow N(\Omega) = \frac{12}{5}x$ και

$P(A) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{x-4}{N(\Omega)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{x-4}{\frac{12}{5}x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x - 4 = \frac{1}{3}\frac{12}{5}x \Leftrightarrow 5x - 20 = 4x \Leftrightarrow x = 20$

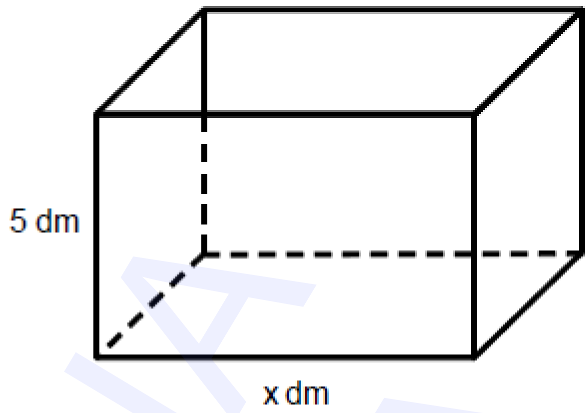
Οπότε $N(\Omega) = \frac{12}{5}x = \frac{12}{5} \cdot 20 = 48$

ΘΕΜΑ Δ.

Δ1. Ο τύπος που δίνει το συνολικό εμβαδόν του ορθογωνίου είναι ¨

$$E_{ολ} = \mathrm{E}_{βάσης} + \mathrm{E}_{παράπλευρης\ επιφάνειας}$$

Αν x το μήκος και y το πλάτος της βάσης τότε :



$\Pi_{\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma} = 2(\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma + \pi\lambda\acute{\alpha}\tau o\varsigma) \Leftrightarrow 20 = 2(x+y) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y = 10 - x$

$E_{\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma} = \mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma \cdot \pi\lambda\acute{\alpha}\tau o\varsigma = x \cdot y = x(10-x) =$
$= 10x - x^2$

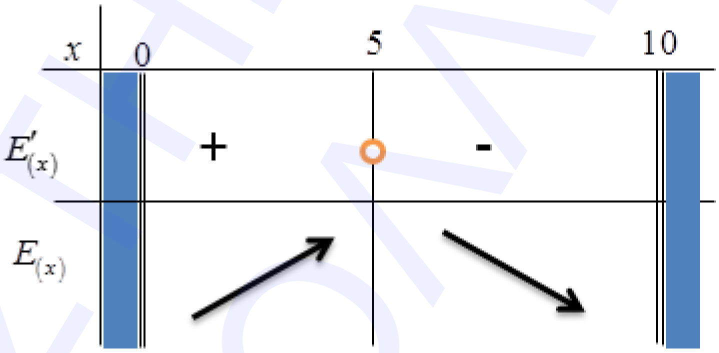
$E_{\pi\alpha\rho\acute{\alpha}\pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\eta\varsigma\ \varepsilon\pi\iota\varphi\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha\varsigma} = \Pi_{\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma} \cdot \acute{\upsilon}\psi o\varsigma = 20 \cdot 5 = 100$

Οπότε $E_{o\lambda} = E_{\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma} + E_{\pi\alpha\rho\acute{\alpha}\pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\eta\varsigma\ \varepsilon\pi\iota\varphi\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha\varsigma} = 10x - x^2 + 100 = -x^2 + 10x + 100$

Αν $E_{(x)} = -x^2 + 10x + 100$ τότε $E'_{(x)} = -2x + 10$ με

$E'_{(x)} = 0 \Leftrightarrow -2x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = 5$

$E'_{(x)} > 0 \Leftrightarrow -2x + 10 > 0 \Leftrightarrow x < 5$



Άρα το κουτί έχει μέγιστη επιφάνεια όταν $x = 5$.

Δ2.

α) $2s^2 - 5s + 2 = 0$ αφού $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 25 - 16 = 9 > 0$ άρα

$$s_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \left\langle \begin{array}{l} 2 \\ \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

- Αν $s = \frac{1}{2}$ τότε $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\frac{1}{2}}{8} = \frac{1}{16} = 0{,}0625 < 10\%$ απορρίπτεται αφού ο δείγμα είναι ανομοιογενές.
- Αν $s = 2$ τότε $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0{,}25 > 10\%$ δεκτή.

β) $s^2 = \frac{1}{\nu}\left[\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2}{\nu}\right] \Leftrightarrow 2^2 = \frac{1}{\nu} \cdot \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \left(\frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}{\nu}\right)^2 \Leftrightarrow 4 = \frac{1}{\nu} \cdot \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - (\bar{x})^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2}{\nu} = 4 + 8^2 \Leftrightarrow \overline{x_i^2} = 68$$

Δ3.

Αφού $E_{(x_i)}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[5,10)$ άρα

$$5 = x_1 < x_2 < \ldots < x_{15} = 9 \Leftrightarrow E_{(5)} = E_{(x_1)} > E_{(x_2)} > \ldots > E_{(x_{15})} = E_{(9)}$$

Με $E_{(5)} = 125$ και $E_{(9)} = 109$ άρα το εύρος R των y_i θα είναι :

$$R = E_{(5)} - E_{(9)} = 125 - 109 = 16$$

Τότε ισχύει:

$$y_i > -4x_i + 9R + 1 \overset{y_i = -x_i^2 + 10x_i + 100}{\Longleftrightarrow} -x_i^2 + 10x_i + 100 > -4x_i + 145 \Leftrightarrow x_i^2 - 14x_i + 45 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_i - 5)\cdot(x_i - 9) < 0 \Leftrightarrow 5 < x_i < 9$$

Άρα $B = \left\{A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3), \ldots, A_{13}(x_{13}, y_{13}), A_{14}(x_{14}, y_{14})\right\}$ με $N(B) = 13$ επομένως:

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{13}{15}$$

Επιμέλεια απαντήσεων

Παναγιώτης Κ. Μάρκος

Μαθηματικός